مقدمه ای بر مدلسازی

جواد کریم زاده اصفهانی

http://hasharat-e-muzi.blogfa.com

مدلسازی (modelling) چیست؟

در مدلسازی یک فرایند طبیعی تبدیل به مدلی میگردد که قابل آنالیز از طریق تکنیکهایی است که می فهمیم و به آنها اعتماد داریم. یک مدل به مدلساز کمک می کند تا رفتار یک پدیده یا واقعه را پیش بینی کند یا توضیح دهد. مدلساز تعاریف و فرض های ساده کننده ارائه می دهد و سپس تعدادی قوانین یا اصول طبیعی (natural laws or principles) که رفتار پدیده را بطور ملموس کنترل میکنند یا توضیح میدهند، انتخاب می کند. مدلساز با استفاده از قوانین طبیعی، متغیر ها (variables)، مفاهیم ریاضی (mathematical concepts) و ابزارهایی چون کامپیوتر یک مدل ریاضی (a mathematical model) را می سازد و حل می کند. هدف مدلساز این است که مدلی ارائه کند که به حد کافی عمومی باشد که رفتار پدیده را بطور ملموس توضیح دهد ولی آنقدر پیچیده نباشد که آنالیز مدل را غیرممکن سازد. برای اطمینان به مدل، مدلساز موارد خاص را با مدل حل می کند و سپس نتایج بدست آمده را با نتاج حاصل از آزمایشات مقایسه می کند. از این طریق، مدلساز به حدود کاربرد مدل پی می برد و این محدودیت ها را با عنوان حدود اعتبار (regimes of validity) مطرح می سازد.

یک مدل ریاضی از یک فرایند طبیعی نوعی تصویر (portrait) به زبان ریاضی است. مثل همه تصاویر، مدل به بعضی از ویژگی های اصلی (original) اهمیت می دهد و بقیه را تغییر می دهد. بنابر این، مدلسازی به همان اندازه که یک شیوه منطقی است یک هنر هم هست. مدلی که ماهرانه ساخته شود اغلب بینش بیشتری در مقایسه با مشاهده (observation) خود یک فرایند طبیعی بدست می دهد زیرا تجزیه و تحلیل دقیق و بدون واسطه بسیاری از فرایند های طبیعی غیرممکن است. گاهی اوقات درک ما از فرایندهای طبیعی تنها از طریق مدلهای ریاضی بر اساس داده های ناتمام (partial data)، حس عمومی علمی، تجربه و شهود است.

مدلسازی تغییرات جمعیت

یکی از موضوع های اصلی اکولوژی نظری (theoretical ecology) استفاده از ریاضی جهت مدلسازی و تجزیه و تحلیل دینامیسم جمعیت های برهمکنش کننده (interacting populations) می باشد. مشهورترین مدل اکولوژیک مدل شکارگر-شکار Lotka-Volterra می باشد که مکررا جهت توصیف دینامیسم زنجیره های غذایی (trophic chains) استفاده شده است. مدل کلاسیک Lotka-Volterra از دو معادله دیفرانسیل (differential equation) تشکیل شده

است که سیکلهای دوره ای منظم در یک برهمکنش منبع-مصرف کننده (resource-consumer interaction) را نشان می دهد. برخلاف مدلهای کلاسیک دیگر که سیستم همگام (synchronized) میزبان-پارازیتوئید با نسلهای مجزا (discrete) را توصیف می کنند، مدل Lotka-Volterra فرض می کند که نسلهای جمعیتهای برهمکنش کننده بطور کامل همپوشانی دارند (overlapped) و فرآیندهای تولد و مرگ پیوسته (continuous) هستند.

مدلسازی و معادلات دیفرانسیل

۱- مفاهیم

تابع (function)

متغیر (variable)

مشتق (derivative)

متغیر مستقل (the independent variable): اساسا زمان ([t] time) میباشد.

معادله دیفرانسیل معمولی ([ODE] ordinary differential equation): معادله ای متشکل از یک تابع یک متغیر، $y(t)$، و یک یا چند مشتق آن.

شناسه (identity)

فاصله (interval)

راه حل (solution): تابع $y(t)$ یک راه حل یک ODE است اگر وقتی در آنODE جایگزین شود یک شناسه برای تمام t در بعضی فواصل ایجاد کند.

صفحه ty (ty-plane)

منحنی راه حل (solution curve): گراف یک راه حل $y(t)$ در صفحه ty.

فرمول راه حل (solution formula): فرمولی که یک راه حل تعریف شده در یک فاصله را توصیف کند.

وضعیت ابتدایی (initial condition): مقادیر معین یک راه حل $y(t)$ یک ODE (یا تعدادی از مشتق های $y(t)$) در نقطه مشخص t_0 .

مسئله مقادیر ابتدایی ([IVP] initial value problem): یک ODE همراه با اوضاع ابتدایی در یک زمان معین t_0 .

۲- فرمول راه حل (solution formula)

فاصله t (t-interval)

پادمشتق (antiderivative): پادمشتق تابع $f(t)$ در یک فاصله t عبارت است از تابع $F(t)$ بطوریکه $F'(t) = f(t)$ برای تمام t در آن فاصله. پادمشتق گیری (antidifferentiation) یک راه کار کلیدی در پیدا کردن فرمول های راه حل می باشد. اگر در ODE نظیر $y' = f(t)$، $f(t)$ یک تابع پیوسته در یک فاصله t باشد آنگاه فرمول راه حل بصورت $y = F(t) + C$ می باشد بطوریکه $F(t)$ یک پادمشتق $f(t)$ است و C میتواند هر مقدار ثابتی باشد.

مدلسازها از ODEs برای خلق مدل استفاده می کنند و سپس تکنیک های بکار می برند تا اطلاعاتی را از مدلها استخراج کنند. تکنیکهای تحلیلی (analytical techniques) مشتمل بر راههایی هستند که فرمول راه حل را برای

معادله دیفرانسیل پیدا میکنند. مسیر کیفی (the qualitative approach) روشهای مختلفی را بکار می برد تا ویژگیهای راه حل ها را مشخص نماید، روشهایی که متکی به داشتن یک فرمول راه حل دم دست نیستند. در مسیر عددی (numerical approach) یک راه حل تقریبی برای IVPs بدست می آید و بطور گرافیکی ترسیم می گردد.

مدل های کوپه ای (compartment models)

مدل های کوپه ای مدلهایی هستند بر اساس نرخ تغییرات (rates of change) یک ماده (substances) که به کوپه ها (compartments) وارد و از آن ها خارج می شود.

قانون تعادل (Balance Law): نرخ خالص تغییرات برابر است با نرخ ورودی منهای نرخ خروجی.

Net Rate of Change = Rate in – Rate out

مثال: جمعیت یک گونه ماهی صرفنظر از مهاجرت به داخل (immigration) و خارج (emigration) از جمعیت را در نظر بگیرید. ورودی به جمعیت از طریق تولد (birth) و خروجی جمعیت از طریق مرگ و میر (death) و صید (harvesting) می باشد پس قانون تعادل برای این جمعیت بصورت زیر می باشد.

$y'(t)$ = birth rate – (death rate + harvesting rate)

$y'(t) = b\, y(t) - (m\, y(t) + H)$

$y'(t)$ نرخ تغییرات جمعیت

$y(t)$ جمعیت در زمان t

b نرخ تولد

m نرخ مرگ و میر

H نرخ صید توسط ماهیگیران

b و m نرخ های ثابت (rate constants) غیر منفی (صفر یا مثبت) هستند.

اگر $a = b-m$ باشد داریم:

$y' = a\, y - H \quad (1)$

a یک ثابت مثبت (positive constant) می باشد که از طریق مشاهدات (observation) مشخص می گردد و به آن ثابت رشد (the growth constant) می گویند.

حال اگر IVP زیر را داشته باشیم:

$y' = a\, y - H, \quad y(t_0) = y_0 \quad (2)$

و با $t_0 = 0$ شروع کنیم IVP زیر را خواهیم داشت:

$$y' = a\,y - H, \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

در اینجا فرض بر این است که a و y_0 ثابت های مثبت (positive constants) و H ثابت غیر منفی (nonnegative constant) هستند. معادله بصورت زیر حل می گردد:

$$y' = a\,y - H$$

$$y' - a\,y = -H$$

$$e^{-at}(y' - a\,y) = -e^{-at} H \quad (4)$$

بعلت اینکه e^{-at} یک عدد غیر صفر است هر راه حل ODE(4) راه حل ODE(1) نیز خواهد بود و برعکس. از اینرو این دو ODE معادل (equivalent) هستند. بعلت اینکه

$$(e^{-at})' = -a\,e^{-at}$$

داریم:

$$(e^{-at} y)' = e^{-at} y' - a\,e^{-at} y$$

$$(e^{-at} y)' = e^{-at}(y' - a\,y)$$

$$(e^{-at} y)' = -e^{-at} H$$

با استفاده از پادمشتق گیری داریم:

$$e^{-at} y(t) = (1/a)\,e^{-at} H + C$$

راه حل عمومی برای ODE(1) بصورت زیر بدست می آید:

$$y(t) = H/a + C\,e^{at} \quad (5)$$

این راه حل روی کل محور t (t-axis) وجود دارد.

یک فرمول راه حل به شرط اینکه مشتمل بر تمام راه حل های یک ODE باشد راه حل عمومی (the general solution) آن ODE است.

برای حل IVP(3) نیاز به پیدا کردن یک ثابت C که برای آن فرمول (۵) وضعیت ابتدایی $y(0) = y_0$ را ادا کند داریم. بنابر این زمان را روی صفر قرار می دهیم.

$$y(0) = H/a + C\,e^{a(0)}$$

$$y_0 = H/a + C$$

$$C = y_0 - H/a$$

اگر این C را در فرمول (۵) بگذاریم:

$$y(t) = H/a + C\,e^{at}$$

$$y(t) = H/a + (y_0 - H/a)\,e^{at}, \quad \text{for } t \geq 0 \quad (6)$$

فرمول (۶) نشاندهنده یگانه راه حل (the unique solution) برای IVP(3) است. این فرمول همچنین ارائه تحلیلی (the analytic representation) راه حل ODE(1) می باشد.